

INFG-TALF Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

Ejercicios de Autómatas Finitos (T3-P3)

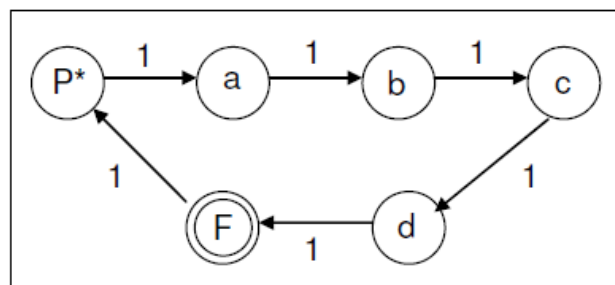
3. Considérese el siguiente problema:

Un hombre, un lobo, una oveja y un repollo están en el lado izquierdo de un río. Hay una lancha en la cual pueden ir el hombre y uno de los otros tres. El hombre desea cruzar al lado derecho del río y puede cruzar sólo a uno de los otros por vez. No obstante si el hombre deja al lobo y a la oveja solos, seguramente el lobo se comerá a la oveja. De igual modo si se quedan la oveja y el repollo solos, la oveja se comerá al repollo. ¿Es posible cruzar el río sin que la oveja o el repollo sean comidos?

Resolver este problema mediante Autómatas Finitos. Considerar que el estado inicial del AF es aquel en el cual se encuentran los cuatro del lado izquierdo y el estado final es aquel en el cual los cuatro están del lado derecho.

Se pide:

1. Indicar cuál sería el alfabeto. ¿Qué significado tienen los elementos del alfabeto? ¿Qué significado tendría una palabra? ¿Qué significado tendría una sentencia?
 2. Indicar el conjunto de estados. ¿Qué significado tienen los estados?
 3. Como reformularías la siguiente pregunta desde el punto de vista de Lenguajes y Autómatas: “¿Es posible cruzar el río sin que la oveja o el repollo sean comidos?”
 4. Diseña el AFD que permita reconocer las palabras que pertenezcan al lenguaje.
4. Indica el grafo de un Autómata Finito No Determinista, con sólo el número de estados indicados que reconozca cada uno de los siguientes lenguajes. El alfabeto es siempre $\{0,1\}$.
- a) El lenguaje $0^m 1^n 0^p$ ($m \geq 0, n \geq 0, p \geq 1$) con sólo tres estados.
 - b) El lenguaje $\{0\}$ con sólo 2 estados.
5. Dado el siguiente autómata finito, marque las afirmaciones que considere correctas



- a. Q/E_0 estaría formado por las clases de equivalencia $C_1=\{P, a, b, c, d\}$ y $C_2=\{F\}$
- b. Q/E_1 estaría formado por clases de equivalencia $C_1=\{P, a, b, c\}$ y $C_2=\{d, F\}$
- c. Q/E_3 estaría formado por clases de equivalencia $C_1=\{P, c, d\}$, $C_2=\{d, F\}$, $C_3=\{a, b\}$
- d. Q/E_4 estaría formado por mismas clases de equivalencia que en Q/E_3
- e. Es necesario calcular Q/E_1 , Q/E_2 , Q/E_3 y Q/E_4 para determinar si las anteriores son verdaderas o falsas

6. Dado el lenguaje $(01)^n$ con $n \geq 0$, marque el autómata que reconoce el lenguaje indicado. Además, obtenga el AFD mínimo equivalente del autómata seleccionado.

- a. $AF = [\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$
 $f(A,0)=B, f(A,\lambda)=\lambda, f(C,0)=B, f(B,1)=C, f(B,\lambda)=\lambda$
- b. $AF = [\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$
 $f(A,0)=B, f(A,\lambda)=F, f(C,0)=B, f(B,1)=C, f(B,\lambda)=F$
- c. $AF = [\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$
 $f(A,B)=0, f(A,F)=\lambda, f(C,B)=0, f(B,C)=1, f(B,F)=1$
- d. $AF = [\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$
 $f(B,0)=A, f(F,\lambda)=A, f(B,0)=C, f(C,1)=B, f(F,1)=B$

7. Marque las afirmaciones verdaderas. Justifique la respuesta.

- 1) Dado un AFND siempre es posible encontrar un AFD que reconozca el mismo lenguaje.
- 2) Dos AFD's son equivalentes si sus AF mínimos respectivos son isomorfos.
- 3) Todo autómata finito no determinista puede ser transformado en un autómata finito determinista equivalente.
- 4) Si un autómata finito no presenta transiciones lambda entonces es determinista.
- 5) Un autómata finito, si con distintos símbolos realiza una transición entre dos estados q_0 y q_1 , entonces el autómata es no determinista.
- 6) Si en el proceso de cálculo del conjunto cociente de un AFD de 5 estados hemos obtenido Q/E_3 , podemos afirmar que $Q/E_3 = Q/E$.
- 7) Los autómatas finitos no deterministas necesariamente realizan transiciones entre estados mediante λ .
- 8) Los autómatas finitos no deterministas no pueden aceptar ninguna palabra, por tanto sólo aceptan el lenguaje vacío.
- 9) $f^*(p,111) = s$ y $f^*(p,110) = s$ indican que el autómata finito es no determinista.
- 10) $f^*(p,110) = s$ y $f^*(p,110) = q$ indican que el autómata finito es no determinista.
- 11) Un AFD es conexo si todos los estados son accesibles desde el estado inicial.
- 12) Un AFD es conexo si todos los estados son accesibles entre sí.
- 13) Dos AFD no conexos que reconocen el mismo lenguaje lo siguen haciendo si eliminamos los estados inaccesibles.
- 14) Un AFD no conexo no puede reconocer ningún lenguaje.
- 15) Dos AFDs que no son equivalentes pueden ser isomorfos.
- 16) Si dos AFDs son isomorfos reconocen el mismo lenguaje.
- 17) Si dos AFDs son equivalentes tienen que ser isomorfos.
- 18) Dos AFDs son equivalentes si al hacer su suma directa los estados finales están en la misma clase de equivalencia.

Ejercicios de Autómatas Finitos (T3-P3)

SOLUCIONES

3. Considérese el siguiente problema:

Un hombre, un lobo, una oveja y un repollo están en el lado izquierdo de un río. Hay una lancha en la cual pueden ir el hombre y uno de los otros tres. El hombre desea cruzar al lado derecho del río y puede cruzar sólo a uno de los otros por vez. No obstante si el hombre deja al lobo y a la oveja solos, seguramente el lobo se comerá a la oveja. De igual modo si se quedan la oveja y el repollo solos, la oveja se comerá al repollo. ¿Es posible cruzar el río sin que la oveja o el repollo sean comidos?

Resolver este problema mediante Autómatas Finitos. Considerar que el estado inicial del AF es aquel en el cual se encuentran los cuatro del lado izquierdo y el estado final es aquel en el cual los cuatro están del lado derecho.

Se pide:

1. Indicar cuál sería el alfabeto. ¿Qué significado tienen los elementos del alfabeto? ¿Qué significado tendría una palabra? ¿Qué significado tendría una sentencia?
2. Indicar el conjunto de estados. ¿Qué significado tienen los estados?
3. Como reformularías la siguiente pregunta desde el punto de vista de Lenguajes y Autómatas: “¿Es posible cruzar el río sin que la oveja o el repollo sean comidos?”
4. Diseña el AFD que permita reconocer las palabras que pertenezcan al lenguaje.

Solución:

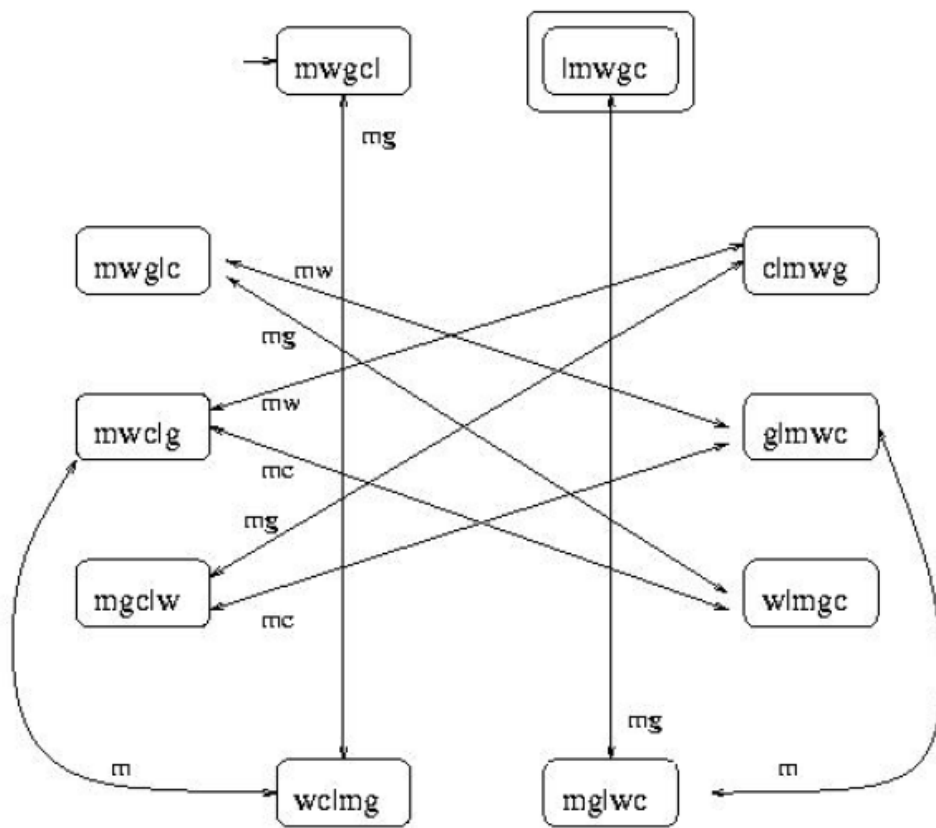
(Esta misma solución también en .ppt)

- Se debe procesar este problema en términos de la teoría de autómatas y lenguajes formales, en concreto, con autómatas finitos. Por lo tanto, hay que definir el alfabeto, los estados y las transiciones.
- Estados: Cada estado representa quién esta en cada orilla del río, es decir, una instantánea de la situación.

- Hay estados donde nadie se come a nadie.
- Hay estados donde alguien sí se come algo.

Sólo se muestran estados donde no se come nada a nadie. Los estados donde alguien se come algo serían estados de error, y no se muestran en esta solución.

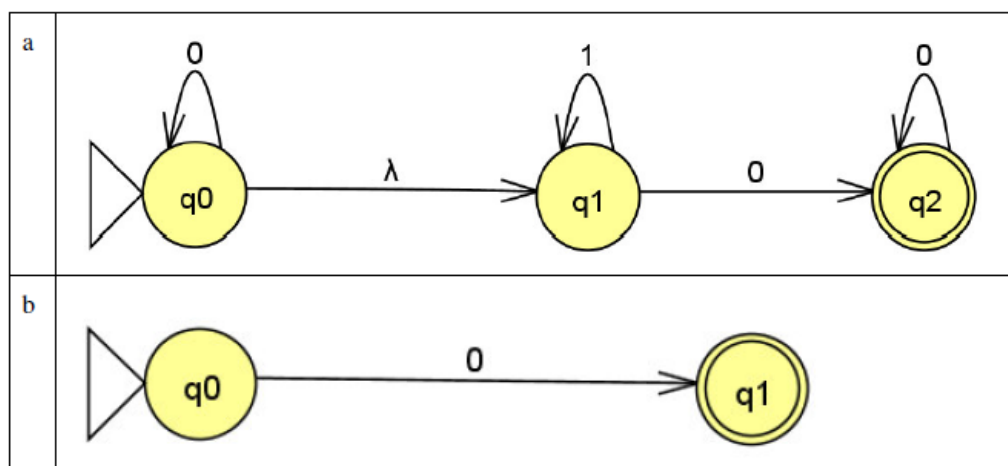
- Alfabeto: Quien va en la barca:
 - Sólo el hombre (m, *man*)
 - Hombre + lobo (mw, *man-wolf*)
 - Hombre + oveja (mg, *man-goat*)
 - Hombre + repollo (mc, *man-cabbage*)
- Transiciones: cada viaje en el que se cruza el río.
 - Igualmente, las transiciones que llevan a un estado donde, por ejemplo, el lobo se come a la oveja no se muestran.
 - Sólo interesa quien va en la barca, no el sentido, de orilla izquierda a orilla derecha, o viceversa.



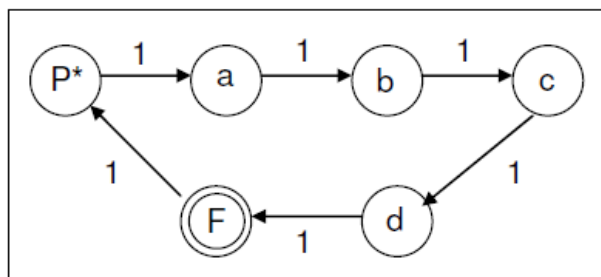
4. Indica el grafo de un Autómata Finito No Determinista, con sólo el número de estados indicados que reconozca cada uno de los siguientes lenguajes. El alfabeto es siempre $\{0,1\}$.
- El lenguaje $0^m 1^n 0^p$ ($m \geq 0, n \geq 0, p \geq 1$) con sólo tres estados.
 - El lenguaje $\{0\}$ con sólo 2 estados.

Solución:

(también en documento *.ppt)



5. Dado el siguiente autómata finito, marque las afirmaciones que considere correctas



- Q/E0 estaría formado por las clases de equivalencia $C1=\{P, a, b, c, d\}$ y $C2=\{F\}$
- Q/E1 estaría formado por clases de equivalencia $C1=\{P, a, b, c\}$ y $C2=\{d, F\}$
- Q/E3 estaría formado por clases de equivalencia $C1=\{P, c, d\}$, $C2=\{d, F\}$, $C3=\{a, b\}$
- Q/E4 estaría formado por las mismas clases de equivalencia indicadas en c.
- Es necesario calcular Q/E1, Q/E2, Q/E3 y Q/E4 para determinar si las anteriores son verdaderas o falsas

Solución:

La opción correcta es la "a".

6. Dado el lenguaje $(01)^n$ con $n \geq 0$, marque el autómata que reconoce el lenguaje indicado. Además, obtenga el AFD mínimo equivalente del autómata seleccionado.

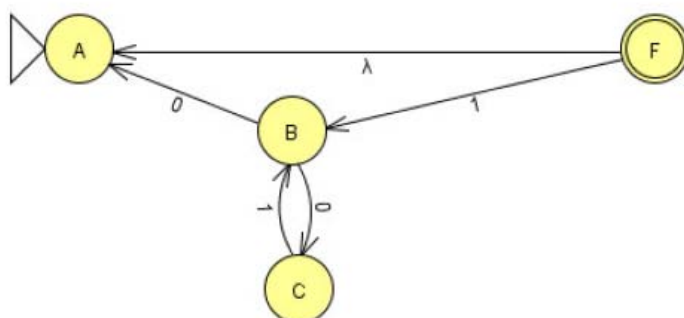
- $AF = [\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$
 $f(A,0)=B, f(A,\lambda)=\lambda, f(C,0)=B, f(B,1)=C, f(B,\lambda)=\lambda$
- $AF = [\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$
 $f(A,0)=B, f(A,\lambda)=F, f(C,0)=B, f(B,1)=C, f(B,\lambda)=F$
- $AF = [\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$
 $f(A,B)=0, f(A,F)=\lambda, f(C,B)=0, f(B,C)=1, f(B,F)=1$
- $AF = [\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$
 $f(B,0)=A, f(F,\lambda)=A, f(B,0)=C, f(C,1)=B, f(F,1)=B$

Solución:

La opción correcta es la "b":

AFND= $[\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$
 $f(A,0)=B, f(A,\lambda)=F, f(C,0)=B, f(B,1)=C, f(B,\lambda)=F$

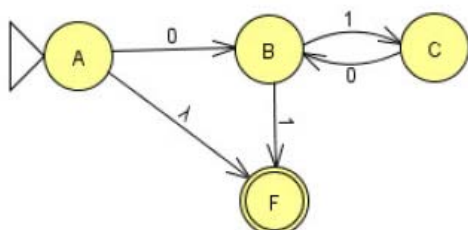
- La opción "a" no es válida por la última transición $f(B,\lambda)=\lambda$, dado que la salida de la transición no puede ser λ , siempre tiene que ser un estado incluido en Q, que en este caso es $\{A,B,C,F\}$.
- La opción "c" no es correcta porque todas las transiciones tienen como símbolo de entrada un estado (B, C o F) en vez de un elemento del alfabeto (0 ó 1), y como estado de llegada un símbolo del alfabeto (0 ó 1) en lugar de un estado (A, B, C o F).
- Por último, la opción "d" no es válida porque hay varias transiciones que llegan al estado inicial A, pero no hay ninguna que salga de él, para empezar el reconocimiento de palabras, como se puede observar en el diagrama de transiciones equivalente:



- Por lo tanto, la única opción restante es la “b”, la única sobre la que se puede comprobar si genera el lenguaje indicado en el enunciado: $(01)^n$ con $n \geq 0$. Efectivamente se verifica que lo cumple, porque reconoce λ , gracias a la transición $f(A, \lambda) = F$, necesario para $n=0$; y el resto de transiciones sólo permiten llegar al estado final cuando se ha leído uno o varios pares “01” consecutivamente.

Respondiendo a la segunda parte del ejercicio, ahora partiendo del AFND original:

AFND = $[\{0,1\}, \{A,B,C,F\}, f, A, \{F\}]$, con f:



se convierte en el AFD equivalente y luego en el AFD mínimo equivalente:

- Tabla de transiciones equivalente al diagrama anterior:

	0	1	λ
$\rightarrow A$	B		F
B		C, F	
C	B		
* F			

Antes de comenzar se comprueba que no es ya un AFD. En este caso hay todas las condiciones para que sea un AF no determinista: celdas vacías, celdas con más de un estado de llegada y transiciones con λ . Por lo tanto se comienza la transformación:

- Cálculo de T^* y extensión de la tabla:

	0	1	λ	$\lambda \lambda$	...	λ^*
$\rightarrow A$	B		F	A, F		A, F
B		C, F		B		B
C	B			C		C
* F				F		F

- Tabla de transiciones con T^* :

	$\lambda^*0 \lambda^*$	$\lambda^*1 \lambda^*$
$\rightarrow A$	B	
B		C, F
C	B	
*F		

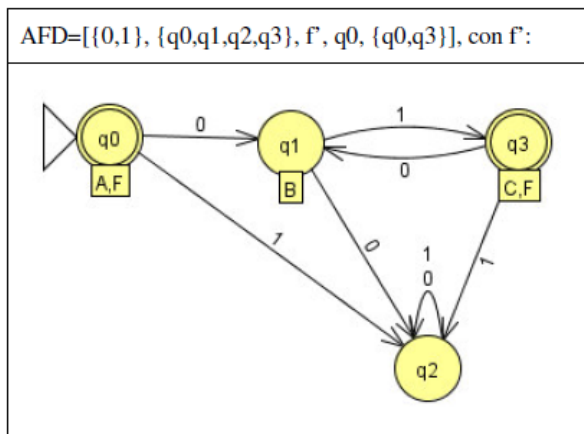
- Cálculo del AFD:

	0	1
$\rightarrow \{A,F\}=q0$	q1	q2
$\{B\}=q1$	q2	q3
$\{\phi\}=q2$	q2	q2
$\{C,F\}=q3$	q1	q2

El estado inicial del AFD es el conjunto de estados a los que se puede transitar con λ^* desde el estado inicial del AFND. En este caso $\{A,F\}$ que se renombra como q0. Además es estado final, porque incluye a F, que es estado final en el AFND

El estado q2 es el sumidero, para completar las transiciones que llegaban a una celda vacía.

Resultado del AFD:



A continuación se calcula el AFD mínimo equivalente. Para ello, primero se calcula el conjunto cociente:

$$Q/E0 = \{\{q0,q3\}, \{q1,q2\}\} = \{C1,C2\}$$

	0	1
$\rightarrow^* q0$	C2	C2
q1	C2	C1
q2	C2	C2
* q3	C2	C2

Los estados q0 y q3 pueden seguir en la misma clase de equivalencia, pero q1 y q2 no. Así:
 $Q/E1 = \{\{q0,q3\}, \{q1\}, \{q2\}\} = \{C1,C2,C3\} = Q/E2 = Q/E$

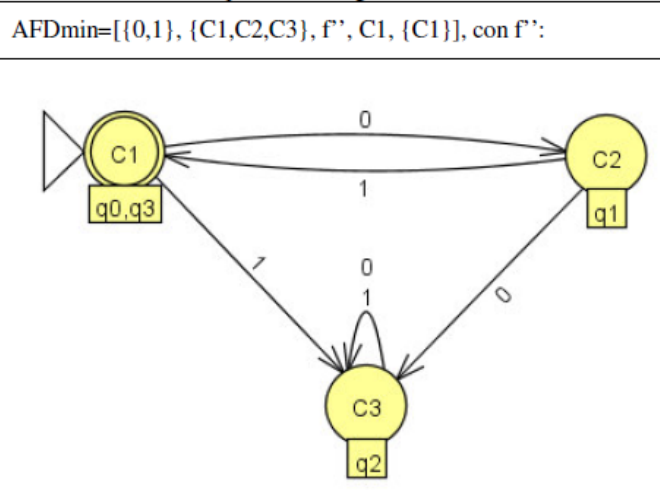
	0	1
$\rightarrow^* q_0$	C2	C3
q_1	C3	C1
q_2	C3	C3
$^* q_3$	C2	C3

Los estados q_0 y q_3 siguen transitando a las mismas clases de equivalencia, y las otras dos clases ya no se pueden dividir más. Así se ha finalizado el cálculo del conjunto cociente:
 $Q/E_2 = Q/E_1 = Q/E$

Con la siguiente tabla de transición renombrada:

	0	1
$\rightarrow^* C_1$	C2	C3
C_2	C3	C1
C_3	C3	C3

Así, el AFD mínimo queda de la siguiente forma:



7. Marque las afirmaciones verdaderas. Justifique la respuesta.

- 1) **Dado un AFND siempre es posible encontrar un AFD que reconozca el mismo lenguaje.**
- 2) **Dos AFD's son equivalentes si sus AF mínimos respectivos son isomorfos.**
- 3) **Todo autómata finito no determinista puede ser transformado en un autómata finito determinista equivalente.**
- 4) Si un autómata finito no presenta transiciones λ entonces es determinista.
- 5) Un autómata finito, si con distintos símbolos realiza una transición entre dos estados q_0 y q_1 , entonces el autómata es no determinista.
- 6) **Si en el proceso de cálculo del conjunto cociente de un AFD de 5 estados hemos obtenido Q/E_3 , podemos afirmar que $Q/E_3 = Q/E$.**
- 7) Los autómatas finitos no deterministas necesariamente realizan transiciones entre estados mediante λ .
- 8) Los autómatas finitos no deterministas no pueden aceptar ninguna palabra, por tanto sólo aceptan el lenguaje vacío.
- 9) $f(p,111) = s$ y $f'(p,110) = s$, implica que el autómata finito es no determinista.
- 10) **$f'(p,110) = s$ y $f''(p,110) = q$, implica que el autómata finito es no determinista.**
- 11) **Un AFD es conexo si todos los estados son accesibles desde el estado inicial.**
- 12) **Un AFD es conexo si todos los estados son accesibles entre sí.**
- 13) **Dos AFD no conexos que reconocen el mismo lenguaje lo siguen haciendo si eliminamos los estados inaccesibles.**
- 14) Un AFD no conexo no puede reconocer ningún lenguaje.
- 15) Dos AFDs que no son equivalentes pueden ser isomorfos.
- 16) **Si dos AFDs son isomorfos reconocen el mismo lenguaje.**
- 17) Si dos AFDs son equivalentes tienen que ser isomorfos.
- 18) Dos AFDs son equivalentes si al hacer su suma directa los estados finales están en la misma clase de equivalencia.